segundo parcial de MA1116 ; 31 de octubre de 2003.

SO L U C I O N E S DEL EXAMEN TIPO A

1.-(8 ptos.) Halle la distancia entre el punto A(2, 1, -2) y la recta, r, representada por :

$$\begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = 2z - 1 \end{cases}.$$

Hay <u>muchas</u> maneras para resolver este ejercicio; exponemos a continuación dos de ellas.

Solución #1 del ejercicio 1.(tipo A) Se halla un vector **u**=(l, m, n) = (3, 2, 1) , paralelo a la recta r;

Se observa que si A' es un punto de la recta r, tal que el vector **A'A** sea perpendicular a r, entonces la longitud del segmento A'A (es decir : el módulo del vector **A'A**) es la distancia buscada.

Una manera de hallar A' es :

i) hallar primero el plano, α, que pasa por A y es perpendicular a la recta r (y por lo tanto es perpendicular al vector **u) :**

α : $3(x-x_A)+2(y-y_A)+1.(z-z_A)=0$; $3x+2y+z-6 = 0$;

ii) intersecar el plano α con la recta r : $A'=\alpha\cap r$; las coordenadas de A' se obtienen entonces resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = 2z - 1 \\ 3x+2y+z-6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(1,1,1) ;$$

Por lo tanto la distancia pedida es $\overline{A'A} = |(x_A-x_{A'},y_A-y_{A'},z_A-z_{A'})|=|(1, 0,-3)|=\sqrt{10}$.

<u>Otra manera</u> de hallar A' , es considerar el vector **PA** , siendo P(3z-2, 2z-1, z) un punto genérico de r y observar que el punto P coincide con A' si y sólo si el vector **PA** es perpendicular a **u** :

$\mathbf{PA}\perp\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{PA.u} = 0 \Leftrightarrow (x_A-x_P,y_A-y_P,z_A-z_P).(3, 2, 1) = 0$;

se obtiene : (2-(3z-2)).3+(1-(2z-1)).2+(-2-z).1 = 0 , -14z+14 = 0 , z=1 por lo cual $A'=P(3z-2, 2z-1, z)$ con $z=1 \Rightarrow A'(1, 1, 1)$.

Solución #2 del ejercicio 1.(tipo A)

Siendo (como en la solución #1) el pto. A' tal que $\mathbf{AA'}\perp\mathbf{u}$, observemos que si P_o es cualquier punto de la recta r, por ejemplo $P_o(-2,-1, 0)$, entonces el vector $\mathbf{P_oA'}$ es igual al vector $\mathbf{w}=\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{P_oA}$ = proyección del vector $\mathbf{P_oA}$ sobre el vector **u** ;

además $(\mathbf{P_oA}-\mathbf{w}) = \mathbf{A'A}$, de manera que el módulo del vector $(\mathbf{P_oA}-\mathbf{w})$ es igual a la distancia pedida.

Por lo tanto tenemos : $\mathbf{w}=\dfrac{(\mathbf{P_oA.u})\,\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \dfrac{(4, 2,-2).(3, 2, 1)}{|\mathbf{u}|^2}\,\mathbf{u} = \dfrac{14}{14}\mathbf{u}= \mathbf{u}$;

$d = |\mathbf{P_oA}-\mathbf{w}|= |(4, 2, -2) - (3, 2, 1)|=|(1, 0, -3)|=\sqrt{10}$.

2.- (7 ptos.) **.** Dado el espacio vectorial $R^4 =\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)|\ x_i \in R \}$, sean $\mathbf{v_1}=(2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v_2}=(-1, 1, 1, 1))$, $W= \text{gen}(\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\})$.

2a) Diga, justificando, si el vector **w**= (1, 1, 2, 5) pertenece a W ;

2b) Demuestre que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es una base para W ;

2c) Halle todos los vectores, $\mathbf{u} \in W$, tales que el producto escalar **u .**(1, 0, 1, 0) sea igual a 4.

Solución del ejercicio 2.(tipo A)

2a) **w**= (1, 1, 2, 5)∈ gen({$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$} si y sólo si existen números x_1,x_2, tales que sea :

(1, 1, 2, 5)= $x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$= x_1(2, 1, 0, 3)+x_2 (-1, 1, 1, 1)=

= (2 x_1- x_2, x_1+ x_2, x_2, 3 x_1+ x_2) , es decir, si y sólo si el siguiente sistema es consistente : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$; procediendo con el método de Gauss-Jordan, tenemos :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow$$ el sistema es inconsistente.

Por lo tanto el vector **<u>no</u>** pertenece al subespacio W.

2b) Ya que por el enunciado del problema se sabe que $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ generan W, bastará demostrar que los dos vectores son <u>linealmente independientes</u> .

Tenemos que verificar que si cierta combinación lineal $x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$ es el vector nulo,

entonces necesariamente $x_1=x_2=0$. En efecto tenemos :

$x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$=(2 x_1- x_2, x_1+ x_2, x_2, 3 x_1+ x_2) =(0, 0, 0, 0) implica que (x_1,x_2) es solución del sistema homogéneo : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ y procediendo igual que en la parte 2a, con el algoritmo de Gauss-Jordan, obtenemos : $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ lo cual pone en evidencia que se tiene solución <u>única</u> (es decir, siendo el sistema homogéneo : (x_1,x_2)=(0, 0) .

Nota : también, en una forma más sencilla (sin embargo correcta), se podía observar que considerando la tercera componente de los vectores involucrados (o la tercera ecuación del sistema) resultaba de inmediato x_2=0 y luego de la primera componente : $2x_1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

2c). El genérico vector, **u**∈ gen({$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$} es **u** = $x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$ y poniendo la condición que **u.**(1, 0, 1, 0) = 4, se obtiene :

($x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$)**.**(1, 0, 1, 0) = $x_1\mathbf{v_1}$**.**(1, 0, 1, 0) + $x_2\mathbf{v_2}$**.**(1, 0, 1, 0) =

= x_1(2, 1, 0, 3)**.**(1, 0, 1, 0) + x_2(-1, 1, 1, 1)**.**(1, 0, 1, 0) = 2 x_1+0 = 4 ⇒ x_1=2 .

Así que resulta que ($x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$)**.**(1, 0, 1, 0) = 4 si y sólo si x_1=2 (con cualquier valor que tenga x_2) ; de esto sigue que el subconjunto , H, de W, formado por los vectores de W cuyo producto escalar por el vector (1, 0, 1, 0) es =4 es :

H={2$\mathbf{v_1}$+$x_2\mathbf{v_2}$ | x_2∈ R}={(4, 2, 0, 6)+a(-1, 1, 1, 1) | a∈ R }={(4-a, 2+a, a, 6+a) | a∈ R}.

3.- (9 ptos.). Dada la matriz H= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,

3a) halle una base para el espacio de filas, R_H, de H ;

3b) halle una base para el espacio de columnas, C_H, de H ;

3c) halle una base para el espacio nulo, N_H, de H ;

3d) halle rango y nulidad de H.

Solución del ejercicio 3.(tipo A)

Actuando sobre la matriz H con el algoritmo de Gauss-Jordan, tenemos :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo HX=0 está representado por :

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ = a**u**+b**v**+c**w**, siendo a, b, c números reales arbitrarios y siendo

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3a) Sabemos que las operaciones elementales de fila no alteran el espacio de filas

[es decir : si dos matrices A, B son equivalentes por filas, entonces tienen el mismo espacio de filas : R_A=R_B] ;

Entonces R_H se genera con las dos filas no nulas de la matriz H*; como además se verifica facilmente que las filas no nulas de una matriz escalonada son linealmente independientes, resulta que una base para R_H es : $\{(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0,1, \frac{3}{2},1, -\frac{3}{2}) \}$;

De esto sigue también que $\rho(H)=2$;

3b) Recordando que el espacio de filas y el espacio de columnas de una misma matriz tienen la misma dimensión, de 2a) sigue que $\dim(C_H)=2$.

También conocemos que en un espacio vectorial, V, de dimensión n, n vectores linealmente independientes forman una base.

Por lo tanto, si consideramos las primeras dos columnas de la matriz H, tenemos dos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión 2 que forman entonces una base para C_H.

Observación : si no se quieren usar los argumentos anteriores, se puede proceder también en la manera siguiente : escalonar, mediante operaciones elementales de fila, la matriz transpuesta, H^t, y considerar las dos filas no nulas de la matriz escalonada.

3c) Los tres vectores **u**, **v**, **w** hallados en la resolución del sistema homogéneo HX=0 , generan el espacio nulo, N_H ; es casi inmediato verificar que estos tres vectores son linealmente independientes y por lo tanto forman una base para N_H ;

3d) $\rho(H) = \dim(C_H)= 2$; $\nu(H) = \dim(N_H) = 3$.

Observe que sumando el rango y la nulidad de la matriz H se obtiene el número de columnas de la misma.

4.- Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga, justificando, si es cierta o falsa :

4a) (2 ptos.) El subconjunto $W = \{A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2,3} \mid b=a + 2c \}$ del espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 2x3 , es un subespacio de $M_{2,3}$;

4b) (4 ptos.) Si $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial, V, y si **v** es un vector de V tal que $\mathbf{v} \notin \text{gen}(\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\})$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ es linealmente independiente.

Solución del ejercicio 4.(tipo A)

4a). La afirmación es <u>cierta</u> . Para justificar la respuesta tenemos que poner en evidencia que : i) $W\neq\emptyset$,

ii) $A, B\in W \Rightarrow A+B\in W$ (cierre de W respecto a la suma) ,

iii) $A\in W$, $k\in R \Rightarrow kA\in W$ (cierre respecto a la multiplicación por escalares).

i) Por ejemplo : $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W \Rightarrow W\neq\emptyset$ (también se puede observar que la matriz nula cumple con la definición de W) ;

ii) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} e, & f, & g \\ h & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} a+e, & b+f, & c+g \\ d+h, & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

si $A \in W$ entonces $b=a+2c$, si $B \in W$ entonces $f=e+2g$,

luego $(b+f) = (a+2c)+(e+2g)= (a+e)+2(c+g)$ así que la matriz A+B también cumple con la definición de W; por lo tanto se cumple el cierre de W respecto a la suma;

iii)Si $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$, $k \in R$ entonces b=a+2c luego para la matriz $kA=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & 0 & 0 \end{bmatrix}$ se cumple que kb=k(a+2c)= ka+2(kc) de lo cual sigue $kA\in W$; por lo tanto se cumple también el cierre respecto a la multiplicación por escalares.

4b). La afirmación es <u>cierta</u> . Tenemos que poner en evidencia que
si $k_o v + k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3$ es igual al vector nulo, entonces, por consiguiente :

$$k_o= k_1=k_2=k_3= 0 .$$

Sea : (*) $k_o\mathbf{v} + k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ = vector nulo.

Observemos primero que debe ser $k_o=0$, ya que si fuese $k_o\neq 0$ podríamos escribir :

$\mathbf{v} = (-\frac{k_1}{k_0})\mathbf{v}_1+ (-\frac{k_2}{k_0})\mathbf{v}_2+ (-\frac{k_3}{k_0})\mathbf{v}_3$ lo cual indicaría que $\mathbf{v} \in$ gen($\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$) contradiciendo la hipótesis.

Si $k_o=0$, la igualdad (*) se escribe : $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ y como $\mathbf{v_1},v_\mathbf{2},v_\mathbf{3}$ son linealmentre independientes, sigue que (además de ser $k_o=0$) $k_1=k_2=k_3= 0$.

SO L U C I O N E S DEL EXAMEN TIPO B

1.-TIPO B(8 ptos.) Halle la distancia entre el punto A(1, 2, -2) y la recta, r, representada por : $\begin{cases} x = 2z -1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$.

El enunciado de esta pregunta se obtiene intercambiando <u>x</u> con <u>y</u> en la pregunta 1 del tipo A.
El procedimiento para la resolución es el mismo que para el tipo A.

2.- TIPO B (7 ptos.) **.** Dado el espacio vectorial R^4 =$\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in R \}$, sean $\mathbf{v_1}$=(2, 1, 0, 3), $\mathbf{v_2}$=(1,-1, 1, 1)), W= gen($\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$) .

2a) Diga, justificando, si el vector **w**= (1, 1, 2, 5) pertenece a W ;

2b) Demuestre que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es una base para W ;

2c) Halle todos los vectores, $\mathbf{u} \in$ W , tales que el producto escalar **u**.(1, 0, -1, 0) sea igual a 4.

El enunciado de esta pregunta se obtiene reemplazando en la pregunta 2 del tipo A el vector $\mathbf{v_2}$=(-1, 1, 1, 1) con el vector $\mathbf{v_2}$=(1,-1, 1, 1)

El procedimiento para la resolución de las partes **2a**) y **2b**) es el mismo que para el tipo A.
Para la parte **2c)** se tiene :

2c). **TIPO B.** El genérico vector, $\mathbf{u}\in$ gen($\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2}$ y poniendo la condición que **u.**(1, 0, 1, 0) = 4, se obtiene :

$(x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2})\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) = x_1\mathbf{v_1}\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) + x_2\mathbf{v_2}\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) =$

$= x_1(2, 1, 0, 3)\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) + x_2(1, -1, 1, 1)\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) = 2 x_1+0 = 4 \Rightarrow x_1=2$.

Así que resulta que $(x_1\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2})\mathbf{.}(1, 0, 1, 0) = 4$ si y sólo si $x_1=2$ (con cualquier valor que tenga x_2) ; de esto sigue que el subconjunto , H, de W, formado por los vectores de W cuyo producto escalar por el vector (1, 0, 1, 0) es =4 es :

$H=\{2\mathbf{v_1}+x_2\mathbf{v_2} \mid x_2\in R\}=\{(4, 2, 0, 6)+a(1, -1, 1, 1) \mid a\in R \}=\{(4+a, 2-a, a, 6+a) \mid a\in R\}$.

3.- (9 ptos.). Dada la matriz $H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

3a) halle una base para el espacio de filas, R_H, de H ;

3b) halle una base para el espacio de columnas, C_H, de H ;

3c) halle una base para el espacio nulo, N_H, de H ;

3d) halle rango y nulidad de H.

El enunciado de esta pregunta se obtiene permutando la columnas de la matriz H en la pregunta 3 del tipo A.

El procedimiento para la resolución es el mismo que para el tipo A.

4.-TIPO B. Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga, justificando, si es cierta o falsa :

4a)**TIPO B** (2 ptos.) El subconjunto $W = \{A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}\in M_{2,3} \mid b= 2a + c \}$ del espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 2x3 , es un subespacio de $M_{2,3}$;

El enunciado de esta pregunta se obtiene reemplazando la fórmula b= a+2c en la pregunta 1 del tipo A , por la fórmula b=2a+c
El procedimiento para la resolución es el mismo que para el tipo A.

4b) **TIPO B** (4 ptos.) Si $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial, V, y si $\mathbf{v}$ es un vector de V tal que $\mathbf{v}\notin \mathrm{gen}(\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\})$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ es linealmente independiente.

Esta pregunta es igual a la **4b** del tipo A.